

MAI 1 – 4.cvičení (27.10.2016)

Spočetné množiny

Zopakujte si , co znamená, že množina M je spočetná.

1. Nechť množiny A, B jsou spočetné, pak také množina $A \times B$ je spočetná.
Nechť množiny A_1, A_2, \dots, A_n jsou spočetné, pak také množina $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je spočetná.
2. Množina všech uspořádaných n -tic ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) racionálních čísel je spočetná.
3. Sjednocení konečně mnoha nebo spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.
4. Množina všech konečných posloupností prvků dané spočetné množiny je spočetná.
5. Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná.

Nekonečné posloupnosti :

Zopakujte si definici posloupnosti reálných čísel.

Co znamená, že posloupnost je omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená?

Zopakujte také definice: posloupnost je rostoucí, resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí.

1. Vyšetřete, zda některou z těchto vlastností mají posloupnosti:

a) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$; b) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ c) $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}$; d) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ e) $n \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$;

e) $\left\{ q^n \right\}$ pro (i) $q \in (-1, 1)$, (ii) pro $q \in (1, \infty)$, (iii) pro $q \leq -1$.

2*. a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ je rostoucí a shora omezená.

b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená .